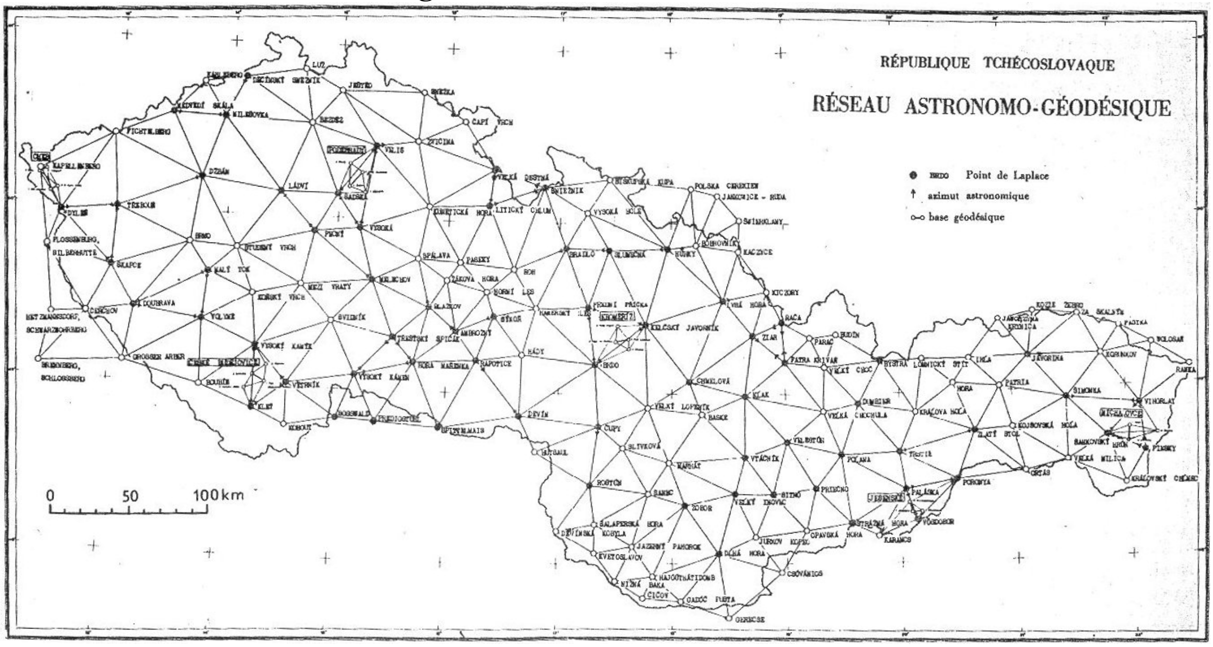
4.4.1 Sinová věta I

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Hodina není příliš obsáhlá a dá se stihnout za méně než 45 minut. Přerušena je schválně, aby žáci měli šanci přemýšlet o problému s dalším řešením i mimo hodinu.

Trigonometrie: řešení úloh o trojúhelnících.

Praktické využití: zaměřování a měření vzdáleností, triangulační síť, 3D grafika v počítačích
Triangulační síť: je problém měřit vzdálenosti dvou bodů v krajině $\Rightarrow$ změříme velmi pečlivě vzdálenost dvou bodů a z nich vztyčíme trojúhelníky (s vrcholy na viditelných místech), v trojúhelnících dopočítáme velikosti stran $\Rightarrow$ získáme síť trojúhelníků, které pokrývají nějaké území a jejichž vrcholy nám umožňují zaměřit libovolný další bod v krajině.
Československá astronomicko geodetická síť z roku 1955



Celá síť stojí na změření 6 vzdáleností (geodetických základen) a 681 úhlů v 227 trojúhelnících.

Problém: Trojúhelníky nejsou obecně pravoúhlé $\Rightarrow$ zatím je nedokážeme dopočítat $\Rightarrow$ musíme najít vzorce pro obecné trojúhelníky (pokud je dokážeme při znalosti tří prvků narýsovat, musíme je dokázat i vypočítat).

Zatím máme vzorce pouze pro pravoúhlé trojúhelníky:

- Pythagorova věta,
- definice goniometrických funkcí,

$\Rightarrow$ zkusíme najít jejich obdoby pro obecný trojúhelník.

Sinová věta:

Pro každý trojúhelník *ABC*, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky *a*, *b*, *c* platí : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Pokyny pro numerické výpočty:

- Ve všech dalších příkladech počítej úhly s přesností na minuty, délky s přesností na čtyři platné číslice.
- Všechny hodnoty počítej, pokud je to možné, z hodnot určených v zadání.
- Všechny vztahy uprav do tvaru, kdy vyjádříš proměnnou, kterou potřebuješ určit, a vzniklý vztah zadávej do kalkulátoru najednou.

Př. 1: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 10$, $\beta = 100°$, $\gamma = 50°$.

Nejdříve určíme úhel α (potřebujeme úhel proti straně *a*):

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (100° + 50°) = 30°$

Teď můžeme použít sinovou větu:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a = \frac{\sin 100°}{\sin 30°} \cdot 10 = 19{,}70$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot a = \frac{\sin 50°}{\sin 30°} \cdot 10 = 15{,}32$$

V trojúhelníku *ABC* platí: $a = 10$, $b = 19{,}70$, $c = 15{,}32$, $\alpha = 30°$, $\beta = 100°$, $\gamma = 50°$.

Poznámka: Úhly udané v minutách (případně i vteřinách) zadáváme do většiny kalkulaček pomocí tlačítka °'", například pro $\sin 30°15'44"$ takto: sin 30 °'" 15 °'" 44 °'" = .
V nejhorším případě je možné i převádění minut na stupně dělením 60.

Př. 2: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $b = 51{,}23$, $\alpha = 61°28'$, $\gamma = 8°13'$.

Nejdříve určím úhel β (potřebujeme úhel proti straně *b*):

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (61°28' + 8°13') = 110°19'$

Teď můžeme použít sinovou větu:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot b = \frac{\sin 61°28'}{\sin 110°19'} \cdot 51{,}23 = 47{,}99$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot b = \frac{\sin 8°13'}{\sin 110°19'} \cdot 51{,}23 = 7{,}807$$

V trojúhelníku *ABC* platí: $a = 47{,}99$, $b = 51{,}23$, $c = 7{,}807$, $\alpha = 61°28'$, $\beta = 110°19'$, $\gamma = 8°13'$.

Př. 3: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 6{,}1$, $b = 7{,}2$, $\alpha = 55°$.

Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel pro straně *b*).

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Rightarrow \sin\beta=\frac{b}{a}\cdot\sin\alpha=\frac{7,2}{6,1}\sin 55°\doteq 0,96687 \Rightarrow$

$\beta=\arcsin\left(\frac{7,2}{6,1}\sin 55°\right)=75°13'$

Dopočítáme úhel γ:

$\alpha+\beta+\gamma=180°\Rightarrow\gamma=180°-(\alpha+\beta)=180°-(55°+75°13')=49°47'$

Teď můžeme určit c:

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow c=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a=\frac{\sin 49°47'}{\sin 55°}\cdot 6,1=5,686$

V trojúhelníku ABC platí: $a=6,1$, $b=7,2$, $c=5,686$, $\alpha=55°$, $\beta=75°13'$, $\gamma=49°47'$.

Uvedené řešení předchozího příkladu není správné!!!!! Zadání vyhovuje také trojúhelník $a=6,1$, $b=7,2$, $c_2=2,573$, $\alpha=55°$, $\beta_2=104°47'$, $\gamma_2=20°13'$.

Př. 4: Ověř, že i druhé řešení ($a=6,1$, $b=7,2$, $c_2=2,573$, $\alpha=55°$, $\beta_2=104°47'$, $\gamma_2=20°13'$) vyhovuje zadání příkladu 3 a najdi v předchozím postupu chybu (místo, kde jsme ztratili druhé řešení).

Musí platit součet úhlů v trojúhelníku: $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

$55°+104°47'+20°13'=180°$ - platí.

Musí platit sinová věta: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{6,1}{\sin 55°}\doteq 7,447$ $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{7,2}{\sin 104°47'}\doteq 7,447$ $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{2,573}{\sin 20°13'}\doteq 7,446$

Všechny výsledky jsou přibližně stejné $\Rightarrow$ jde opravdu o správné řešení.

Více příští hodinu.

Shrnutí: Dopočítávat strany a úhly obecného trojúhelníku můžeme pomocí sinové věty: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.